Chapitre 11

Suites de nombres réels

I Nombres réels

1 droite réelle

définition :

*La **distance entre 2 réels** a et b est la distance entre les points de la droite réelle qui ont pour abscisses a et b*

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 \qquad d(a;b) = |b-a| = \sqrt{(b-a)^2}$$

Inégalités triangulaires :

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

1. $|a-b| \leqslant |a| + |b|$ *et* $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
2. $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a-b|$ *et* $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a+b|$

Propriété :

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

2 parties de $\mathbb{R}$

On conserve la définition intuitive des ensembles de nombres $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$

Caractérisation des intervalles :

Soit $I \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ une partie de $\mathbb{R}$.
I est un intervalle si, et seulement si, $\forall (a;b) \in I$ avec $a < b$, $[a;b] \subset I$

Ensembles de nombres usuels :

1. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs se caractérise par :*
$$\mathbb{Z} = \{\, k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N} \text{ ou } -k \in \mathbb{N} \,\}$$
2. *L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombre décimaux, qui admettent une écriture décimale finie, se caractérise par :*
$$\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (p;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad x = \frac{p}{10^n} \right\}$$
3. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombre rationnels, qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux entiers relatifs, se caractérise par :*
$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (p;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad x = \frac{p}{q} \right\}$$

Propriété :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Exemples et démonstration : voir exercice 37

3 Ordre dans $\mathbb{R}$

Définitions :

*Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ une partie **non vide** de $\mathbb{R}$*

1. *On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de la partie A lorsque $\forall a \in A,\ a \leqslant M$*
*Si, de plus, $M \in A$ on dit que M est **le maximum** de A*
S'il existe, le maximum de A est nécessairement unique et se note $\max(A)$
*On dit que la partie A est **majorée** lorsqu'elle admet (au moins) un majorant (et dans ce cas elle en admet une infinité).*
2. *On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de la partie A lorsque $\forall a \in A,\ a \geqslant m$*
*Si, de plus, $m \in A$ on dit que m est **le minimum** de A*
S'il existe, le minimum de A est nécessairement unique et se note $\min(A)$
*On dit que la partie A est **minorée** lorsqu'elle admet (au moins) un minorant (et dans ce cas elle en admet une infinité).*
3. *Lorsque la partie A est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**.*

Voir démonstration 4

Théorème de la borne supérieure :

*Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ une partie **non vide** de $\mathbb{R}$*

1. *Si A est majorée, alors l'ensemble des majorants de A admet un minimum.*
   *Ce plus petit majorant de A, noté $\sup(A)$, est appelé **borne supérieure** de A.*
2. *Si A est minorée, alors l'ensemble des minorants de A admet un maximum.*
   *Ce plus grand minorant de A, noté $\inf(A)$, est appelé **borne inférieure** de A.*

Propriété :

*Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ une partie **non vide** de $\mathbb{R}$*

1. *Si A est majorée, alors*

$$M = \sup(A) \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in A,\ a \leqslant M \text{ et } \forall R < M\, \exists a \in A \,|\, a > R$$

2. *Si A admet un maximum alors $\sup(A) = \max(A)$*
3. *Si A est minorée, alors*

$$m = \inf(A) \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in A,\ a \geqslant m \text{ et } \forall R > m\, \exists a \in A \,|\, a < R$$

4. *Si A admet un minimum alors $\inf(A) = \min(A)$*

démonstration : voir exercice 5

II suites numériques

1 Modes de définition d'une suite numérique

Définition :

*Une **suite numérique** est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*
*Le **terme** de rang $n \in \mathbb{N}$ de la suite u est l'image de n par u. Il se note $u(n)$ ou u_n.*
La suite u peut être caractérisée par la liste (infinie) de ses termes, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou seulement (u_n) lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Voir exemple 6 et remarque 7

modes de définition d'une suite :

Une suite peut être définie :

- *de manière **explicite** par une formule donnant l'expression de u_n en fonction de n*
- *de manière **implicite** comme solution d'une équation dépendant de n*
- *par la donnée de quelques termes et d'une relation de **récurrence** exprimant un terme en fonction des précédents*

Voir exemple 8

2 bornes et monotonie

Définitions :

- *On dit qu'un suite u est **à valeur dans** une partie $A \subset \mathbb{R}$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in A$*
- *On dit qu'une suite u est **majorée** (par $M \in \mathbb{R}$) lorsqu'elle est à valeur dans une partie de $\mathbb{R}$ majorée par M,*
  autrement dit lorsque $\{\ u_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ est une partie de $\mathbb{R}$ majorée (par M).
- *On dit qu'une suite u est **minorée** (par $m \in \mathbb{R}$) lorsqu'elle est à valeur dans une partie de $\mathbb{R}$ minorée par m,*
  autrement dit lorsque $\{\ u_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ est une partie de $\mathbb{R}$ majorée (par m).
- *On dit qu'une suite u est **bornée** lorsqu'elle est à valeur dans une partie bornée de $\mathbb{R}$,*
  autrement dit lorsque $\{\ u_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Propriété :

Une suite numérique (u_n) est bornée si, et seulement si, la suite $(\,|u_n|\,)$ est majorée.

Voir démonstration 9

Sens de variation d'une suite :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- *Les affimrations suivantes sont équivalentes :*
  1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante***
  2. *$\forall (p;q) \in \mathbb{N}^2$, si $p < q$ alors $u_p < u_q$ (conservation de l'ordre strict)*
  3. *$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$*
- *Les affimrations suivantes sont équivalentes :*
  1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante***
  2. *$\forall (p;q) \in \mathbb{N}^2$, si $p \leqslant q$ alors $u_p \geqslant u_q$ (inversion de l'ordre large)*
  3. *$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$*
- *Les suites qui sont soit croissantes, soit décroissantes sont dites **monotones***
  *Les suites qui sont soit strictement croissantes, soit strictement décroissantes sont dites **strictement monotones***

On caractérise de manière similaire une suite **croissante** ou une suite **strictement décroissante** : voir exercice 38

.

Méthode alternative :

Lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ est le même que celui de $u_{n+1} - u_n$.
Il est donc possible d'étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en comparant pour tout $n \in \mathbb{N}$ le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec le nombre 1.

Propriété :

Soien t $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$

1. *Si f est (strictement) croissante, alors (u_n) est (strictement) croissante.*
2. *Si f est (strictement) décroissante, alors (u_n) est (strictement) décroissante.*

Les réciproques sont fausses.

3 Suites extraites

Définition :

Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, la ***suite extraite*** *associée à φ est la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire l'application $u \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée ou bornée) alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée ou bornée).*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) monotone, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) monotone avec le même sens de variation.*

Voir exemple 10

4 Opérations sur les suites

Définition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

1. *La combinaison linéaire $au + bv$ des suites u et v est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = au_n + bv_n$*
2. *Le produit des suites u et v est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_n \times v_n$*
3. *Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, le quotient des suites u et v est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$*

5 suites de référence

suites arithmétiques :

Soient $c \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme c et de raison r*
2. *$u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = r + u_n$*
3. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \times r + c$*

Si elles sont vraies, on a alors plus généralement :

$$\forall (k; n) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } k \leqslant n,\ u_n = (n - k) \times r + u_k$$

suites géométriques :

Soient $c \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme c et de raison q*
2. *$u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$*
3. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = c \times q^n$*

Si elles sont vraies, on a alors plus généralement :

$$\forall (k; n) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } k \leqslant n,\ u_n = u_k \times q^{n-k}$$

■ Exemples :

La suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1.
On obtient ainsi un exemple de **suite qui n'est ni croissante ni décroissante** et n'est donc pas monotone.

Méthodes :

- Etudier une suite numérique définie par une formule explicite (sens de variation, bornes)

  Voir exercices 39 et 40

- Etudier une suite numérique définie par une formule de récurrence (calcul de valeurs, représentation graphique, sens de variation, bornes, ...)

  Voir exercices 47, 48 et 53

- Etudier, de manière guidée, une suite numérique définie par une relation implicite

  Voir exercices 43 et 62

- Reconnaître et utiliser les propriétés d'une suite arithmétique ou géométrique

  Voir exercices 49, 50 et 51

.

III limite d'une suite numérique

1 Suites convergentes, suites divergentes

Définition :

Soient $L \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.
Par définition, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut L*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$
3. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L*
4. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$
5. *Quel que soit le seuil de précision $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un rang $R \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont proches de L avec une distance inférieure ou égale à ε*
6. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant R \Rightarrow |u_n - L| \leqslant \varepsilon$

Exemple des suites constantes : voir exercice 12

Propriété :

Soient $L \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} |u_n - L| = 0$$

Définition :

Soit$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.
Par définition, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut $+\infty$*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$*
4. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
5. *Quel que soit $S \in \mathbb{R}$ (grand nombre fixé désignant un seuil de "proximité" avec $+\infty$), il existe un rang $R \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs à S (c'est à dire "proches" de $+\infty$)*
6. $\forall S \in \mathbb{R},\ \exists R \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant R \Rightarrow u_n \geqslant S$

Suite divergente vers $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ peut se définir de manière similaire (voir exercice 42)
ou bien en posant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$

Propriété :

Si une suite admet une limite, alors sa limite est unique

Voir démonstration 11

Définition :

On dit qu'une suite est ***convergente*** *lorsqu'elle admet une limite finie.*
On dit qu'une suite est ***divergente*** *lorsqu'elle n'est pas convergente, c'est à dire lorsque sa limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$ ou bien lorsqu'elle n'admet pas de limite.*

Propriété :

Toute suite réelle convergente est bornée.

Voir démonstration 14

Propriété :

Si *une suite possède une limite (finie ou infinie)*
alors *toutes ses suites extraites possèdent la même limite*

Voir démonstration 15

Utilisation :
Cette propriété permet de prouver qu'une suite n'admet **pas de limite**.
Par contraposition, si on peut trouver deux suites extraites qui n'ont pas la même limite, alors la suite dont elles sont extraites n'admet pas de limite (voir exercice 41).

2 Limite d'une somme

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent deux suites admettant chacune une limite (finie ou infinie).
Lorsqu'au moins une des deux suites n'admet pas de limite, les règles ci-dessous ne sont pas applicables.
a et b désignent des nombres réels de signe quelconque.

Convention de lecture du tableau :

	limite de (w_n)
limite de (u_n)	limite de $(u_n + w_n)$

? indique une forme indéterminée.

	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**
a	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

Voir extrait de démonstration 17

.

3 Limite d'un produit

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent deux suites admettant chacune une limite (finie ou infinie).
Lorsqu'au moins une des deux suites n'admet pas de limite, les règles ci-dessous ne sont pas applicables.
L et λ désignent des nombres réels **strictements positifs**.
Convention de lecture du tableau :

	limite de (v_n)
limite de (u_n)	limite de $(u_n \times w_n)$

? indique une forme indéterminée.

	$-\infty$	$-\lambda$	0	λ	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**	$-\infty$	$-\infty$
$-L$	$+\infty$	$L\times\lambda$	0	$-L\times\lambda$	$-\infty$
0	**?**	0	0	0	**?**
L	$-\infty$	$-L\times\lambda$	0	$L\times\lambda$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

Voir extrait de démonstration 21

Multiplication par une constante :

La suite (λu_n) est la même que la suite obtenue en effectuant le produit de la suite (u_n) avec la suite constante égale à λ, qui converge évidemment vers λ
Voir exemple 16

4 Limite d'un quotient

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent deux suites admettant chacune une limite (finie ou infinie).
Lorsqu'au moins une des deux suites n'admet pas de limite, les règles ci-dessous ne sont pas applicables.
L et λ désignent des nombres réels **strictements positifs**.
Convention de lecture du tableau :

	limite de (w_n)
limite de (u_n)	limite de $\left(\dfrac{u_n}{w_n}\right)$

? indique une forme indéterminée.
0^- indique que la suite tend vers 0 en restant négative.
0^+ indique que la suite tend vers 0 en restant positive.
0 indique que la suite tend vers 0 en changeant éventuellement de signe.

	$-\infty$	$-\lambda$	0^-	0^+	λ	$+\infty$
$-\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**
$-L$	0^+	$\dfrac{L}{\lambda}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\dfrac{L}{\lambda}$	0^-
0	0	0	**?**	**?**	0	0
L	0^-	$-\dfrac{L}{\lambda}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{L}{\lambda}$	0
$+\infty$	**?**	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**

Il est nécessaire de supposer que le dénominateur ne s'annule pas pour que le quotient soit défini. Il n'est pas possible de conclure à partir de la règle de la limite d'un quotient lorsque le dénominateur tend vers 0 sans être de signe constant.
Voir extrait de démonstration 18

5 Limites et ordre

Théorème des gendarmes :

Soit $L\in\mathbb{R}$
***Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites de nombres réels telles que :*

- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L*
- *la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L*
- *Pour tout entier n à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$*

***alors** la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L*

Voir démonstration 19

Théorème divergence par comparaison :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que pour tout entier n à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*

Voir extrait de démonstration 20

Propriété conservation de l'ordre large par passage à la limite :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant chacune une limite et $C\in\mathbb{R}$
***Si** pour tout entier n à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$*

En particulier, si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant C$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant C$

Cette propriété ne s'applique pas pour une inégalité stricte (voir exemple 24)

Corollaire limite des suites géométriques :

1. *Si* $q \in]1; +\infty[$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
2. *Si* $q = 1$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
3. *Si* $q \in]-1; 1[$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
4. *Si* $q \in]-\infty; -1]$, *alors la suite* $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'admet pas de limite.*

voir extrait de démonstration 23

Théorème de la limite monotone :

1. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante et non majorée,*
   alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$
2. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante et majorée,*
   alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\sup\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}$
3. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante et non minorée,*
   alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$
4. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante et minorée,*
   alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\inf\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

Voir extrait de démonstration 25

Définition :

On dit que deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont* ***adjacentes*** *lorsque :*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante*
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante*
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$

(elles sont également dites adjacentes si les rôles de u et v sont permutés)

Théorème des suites adjacentes :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites adjacentes avec* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante.*
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent toutes les deux vers la même limite* $L \in \mathbb{R}$ *avec*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 \leqslant u_n \leqslant L \leqslant v_n \leqslant v_0$$

Voir démonstration 26

Méthodes :

- Démontrer qu'une suite n'admet pas de limite
  Voir exercices 41 et 52
- Déterminer la limite d'une suite en utilisant le théorème des gendarmes ou le théorème de comparaison des limites infinies
  voir exercices 54, 44, 45 et 46
- Utiliser le théorème de la limite monotone pour établir la convergence ou la divergence d'une suite définie par une formule de récurrence, puis déterminer son éventuelle limite par une recherche de point fixe
  Voir exercices 47, 48 et 53
- Reconnaître ou construire des suites adjacentes afin d'obtenir une valeur approchée d'un nombre réel
  voir exercices 49 et 53

IV Comparaison de suites

définitions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang)*

1. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***dominée*** *par* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque la suite* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
   On note alors $u_n = O(v_n)$, *ce qui se lit* u_n *est un* ***grand O*** *de* v_n.
2. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***négligeable*** *devant* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque la suite* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.
   On note alors $u_n = o(v_n)$, *ce qui se lit* u_n *est un* ***petit o*** *de* v_n.
3. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont* ***équivalentes*** *lorsque la suite* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 1
   On note alors $u_n \sim v_n$.

Propriété :

1. ***réflexivité*** *pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *non nulle à partir d'un certain rang* $u_n \sim u_n$
2. ***symétrie*** *pour toutes suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *non nulles à partir d'un certain rang,* $u_n \sim v_n \quad \Leftrightarrow \quad v_n \sim u_n$
3. ***transitivité*** *pour toutes suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *non nulles à partir d'un certain rang, si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n \sim w_n$

On dit que la relation $\sim$ *est une relation d'équivalence.*

Voir démonstration 28

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang)

1. *Si* $u_n = o(v_n)$ *alors* $u_n = O(v_n)$
2. *Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $u_n = O(v_n)$
   En particulier, $u_n = O(u_n)$
3. *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$ *alors* $u_n = O(w_n)$
4. *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$ *alors* $u_n = o(w_n)$
5. *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$ *alors* $u_n = o(w_n)$
6. $u_n \sim v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n - v_n = o(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad u_n = v_n + o(v_n)$
   En particulier, $v_n \sim v_n + o(v_n)$

Voir démonstration 30

Produits et sommes de suites négligeables ou dominées :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang)

1. $O(u_n) \times O(w_n) = O(u_n \times w_n)$
2. $o(u_n) \times O(w_n) = o(u_n \times w_n)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda o(u_n) = o(\lambda u_n) = o(u_n)$
4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda O(u_n) = O(\lambda u_n) = O(u_n)$
5. $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$
6. $O(u_n) + O(u_n) = O(u_n)$

Voir démonstration 31

Théorème de croissances comparées (reformulation) :

Soient $(a;b;c) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ *et* $\lambda \in]1;+\infty[$

1. $(\ln(n))^a = o(n^b)$
2. $n^b = o(e^{cn})$ *et* $n^b = o(\lambda^n)$
3. $\lambda^n = o(n!)$

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang)
Si $u_n \sim w_n$ *alors :*

1. *si* (u_n) *admet une limite, alors* (w_n) *admet la même limite*
2. *à partir d'un certain rang,* u_n *et* w_n *sont du même signe*

Voir démonstration 32

Propriété compatibilité de l'équivalence avec certaines opérations :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang)
Si $u_n \sim w_n$ *et* $v_n \sim x_n$ *alors :*

1. $u_n \times v_n \sim w_n \times x_n$ *(compatibilité avec le produit)*
2. $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{x_n}$ *(compatibilité avec le quotient)*
3. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $u_n^k \sim w_n^k$ *(compatibilité avec les puissances)*
   cela reste vrai pour $k \in \mathbb{R}$ lorsque les suites sont strictement positives.

Voir démonstration 29

L'équivalence des suites n'est en générale pas compatible avec les sommes (voir exercice 55)

<u>Méthodes :</u>

- Utiliser des relations de domination, de négligeabilité ou d'équvalence pour calculer une limite de suite
  Voir exercices 57 et 58
- Déterminer un équivalent simple d'une suite
  Voir exercices 59 et 60