Feuille d'exercices 5: Variables aléatoires réelles

I Exercice du cours

Exercice 1:

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X

1. Démontrer que $\lim\limits_{t\to a^-} F_X(t) = P(X < a)$

   Indication : $]-\infty; a[=]-\infty; a-1] \cup \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left]a - \frac{1}{n}; a - \frac{1}{n+1}\right]$

2. Démontrer que $\lim\limits_{t\to a^+} F_X(t) = F_X(a)$

3. Exprimer à l'aide des images et limites de la fonction F_X les probabilités $P(X \in]t; +\infty[)$, $P(X \in [a; b])$, $P(X = a)$, $P(X \in]a; b[)$ et $P(X \in [a; b[)$

Exercice 2:

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et
Démontrer les résultats du cours suivants :

1. Si X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$, alors :

   (a) La fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & si \quad t \in [a; b] \\ 1 & si \quad t > b \end{cases}$

   (b) $-X$ suit la loi uniforme sur $[-b; -a]$

   (c) Pour tout $k > 0$, kX suit la loi uniforme sur $[ka; kb]$

   (d) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $X + c$ suit la loi uniforme sur $[a + c; b + c]$

2. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ si, et seulement si, $U = \dfrac{X-a}{b-a}$ suit la loi uniforme sur $[0; 1]$

Problème 3:

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0; 1]$.
On suppose que deux intervalles inclus dans $[0; 1]$ de même longueur ont toujours la même probabilité de contenir X

1. Vérifier que pour $t \in [0; 1]$, $F_X(t) = P(X \in [0; t])$ et déterminer $F_X(t)$ lorsque $t \notin [0; 1]$
2. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, en remarquant que $[0; 1]$ est la réunion de q intervalles bien choisis, montrer que $P\left(X \in \left[0; \frac{1}{q}\right]\right) = \frac{1}{q}$
3. En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant q$, $P\left(X \in \left[0; \frac{p}{q}\right]\right) = \frac{p}{q}$
4. On admet le résultat suivant : "Pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe deux suites adjacentes de nombres **rationnels** qui convergent vers t"
   En déduire que $\forall t \in [0; 1]$, $F_X(t) = t$
5. Quelle est la loi de probabilité de X ?

Exercice 4:

Soit $\lambda \in]0; +\infty[$
Démontrer les résultats du cours suivants :

1. La fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geqslant 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité.
2. Si X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, alors la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & si \quad t \geqslant 0 \end{cases}$ et X est une variable aléatoire presque sûrement positive.

Exercice 5:

1. Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$.
   Montrer que :

   (a) X admet une espérance et $E[X] = \dfrac{a+b}{2}$

   (b) X admet un moment d'ordre 2 et $V[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

2. Soient $\lambda > 0$ et X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
   Montrer que :

   (a) X admet une espérance et $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$

   (b) X admet un moment d'ordre 2 et $V[X] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Exercice 6:

Montrer que si X est une variable aléatoire admettant une variance non nulle, alors la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E[X]}{\sigma[X]}$ est centrée réduite.

.

Problème 7:

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
  En remarquant que $]s; +\infty[\cap]s+t; +\infty[=]s+t; +\infty[$,

  montrer que $\forall (t; s) \in [0; +\infty[^2, \qquad P_{(X>s)}(X > t+s) = P(X > t)$
- Soit X une variable aléatoire vérifiant :

$$\forall (t; s) \in [0; +\infty[^2, \qquad P_{(X>s)}(X > t+s) = P(X > t)$$

  Le fait que les probabilités conditionnelles ci-dessus aient toutes un sens suppose donc implictement que $\forall s \in \mathbb{R}$, $P(X > s) \neq 0$

1. Quelques valeurs
   (a) Déterminer le signe de $\lambda = -\ln(P(X > 1))$
   (b) En considérant le cas, $t = s = 0$ démontrer que X est une variable presque sûrement strictement positive (c'est à dire que $P(X > 0) = 1$)
   (c) En déduire que la fonction de répartition F_X est nulle sur $]-\infty; 0]$
   (d) Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \neq 1$
2. Dérivabilité à droite en 0 de F_X
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P\left(X > \dfrac{1}{n}\right)^k = P\left(X > \dfrac{k}{n}\right)$
   (b) En déduire que $P\left(X > \dfrac{1}{n}\right) = e^{-\dfrac{\lambda}{n}}$
   (c) Soit $s \in]0; 1]$. On pose $n = \lfloor \dfrac{1}{s} \rfloor$.
   Encadrer $F_X(s)$ et $\dfrac{1}{s}$ et en déduire que : $nF_X\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{F_X(s)}{s} \leqslant (n+1)F_X\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   A l'aide du théorème des gendarmes, en déduire que $\lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{F_X(s)}{s} = \lambda$.
3. Dérivabilité de F_X
   (a) Montrer que $\forall (t; s) \in [0; +\infty[^2$, $\dfrac{F_X(t+s) - F_X(t)}{s} = \dfrac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(s)} \times \dfrac{F_X(s)}{s}$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{F_X(t+s) - F_X(t)}{s} = -\lambda F_X(t) + \lambda$
   (c) En remarquant que $t = (t-s) + s$, montrer que pour $t \in]0; +\infty[$ et $s \in [0; t[$,
   $$\frac{F_X(t-s) - F_X(t)}{-s} = \frac{1 - F_X(t)}{1 - F_X(s)} \times \frac{F_X(s)}{s}$$
   (d) En déduire que $\lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{F_X(t-s) - F_X(t)}{-s} = -\lambda F_X(t) + \lambda$
4. Equation différentielle
   D'après ce qui précède, F_X vérifie $F_X(0) = 0$ et $\forall t \in [0; +\infty[$,
   $$F_X'(t) = -\lambda F_X(t) + \lambda$$
   Déterminer l'expression de F_X et en déduire que X suit la loi exponentielle de paramètre λ

Exercice 8:

1. Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire (quelconque pour cette question).
   On suppose que F_X est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   On note $F_X^{-1} : [0; 1] \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.
   (a) Montrer que la variable aléatoire définie par $Y = F_X(X)$ suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.
   (b) Montrer que si U suit la loi uniforme sur $[0; 1]$ alors la variable aléatoire $F_X^{-1}(U)$ suit la même loi de probabilités que X
2. A l'aide des bibliothèques Random et scipy.stats de Python, proposer un moyen de simuler variable gaussienne suivant une loi normale centrée réduite (sans utiliser la fonction prédéfinie normalvariate)
3. En déduire un moyen de simuler variable gaussienne suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (sans utiliser la fonction prédéfinie normalvariate)

Exercice 9:

Démontrer toutes les propriétés et tous les corollaires du paragraphe sur les lois normales

II Lois uniformes et lois exponentielles

Exercice 10:

La Belle Au Bois Dormant est assise devant la cheminée, sa quenouille à la main. L'intervalle de temps T, estimé en minutes, qui sépare l'instant où elle a pris place pour filer la laine de celui où elle va se piquer avec le fuesau suit une loi exponentielle de moyenne $E[T] = 10$.

1. Déterminer les expressions de la densité de probabilité, de la fonction de répartition et de de l'écart type de la variable T
2. Sachant qu'il ne lui est rien arrivé pendant les 8 premières minutes, calculer la probabilité pour qu'elle ne se pique pas dans les 5 minutes qui suivent.

Exercice 11:

Le président des Etats-unis se prépare à décréter l'embargo économique contre Cuba. Ses conseillers ont estimé que la durée de la crise suivrait une loi exponentielle de moyenne 4 ans. En supposant exacte cette estimation et s'achant qu'il fume 2 cigares par jour, calculer le nombre de boîtes de 500 Havanes qu'il doit faire acheter par sa secrétaire pour ne pas en manquer, avec une probabilité supérieure à 0,95.
(On ne demande pas de calculer la probabilité que le président nuise à sa santé en fumant ces cigares : il est certain qu'il s'agit d'un événement presque sûr !)

Exercice 12:

1. Rappeler la valeur de $P(X > 0)$ lorsque X suit une loi exponentielle.
   En déduire que $\forall b \in \mathbb{R}^*$, la variable $X + b$ ne suit pas une loi exponentielle
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   Montrer que si $a > 0$, la variable aléatoire aX suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{a}$
   Est-ce encore le cas si on ne suppose plus $a > 0$?

Exercice 13:

```
 import Random as rd import math
# l'instruction rd.random() génère un nombre pseudo-aléatoire
suivant la loi uniforme sur [0;1[
# l'instruction math.floor(x) renvoit la partie entière du
nombre x
# l'instruction math.log(x) renvoit le logarithme népérien du
nombre strictement positif x

def valeur(a,b):
.     '''entrée : deux nombres réels a et b
.     sortie : un nombre aléatoire'''
.     X = rd.random()
.     V = (b-a)*X + a
.     return V

def entier(n):
.     '''entrée : un entier naturel n
.     sortie : un entier aléatoire'''
.     X = rd.random()
.     K = math.floor(n*X) + 1
.     return K

def nombre(m):
.     '''entrée : un nombre réel strictement positif m
.     sortie : un nombre aléatoire'''
.     X = rd.random()
.     R = - math.log(X)/m
.     return R
```

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire V simulée par la fonction valeur ?
2. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire K simulée par la fonction entier ?
3. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire R simulée par la fonction nombre ?

La bibliothèque Random propose des simulations prédéfinies pour les lois de probabilités usuelles indiqué par help(rd.Random) (en particulier randint, uniform et expovariate pour cet exercice).

Problème 14:

Pour toute variable aléatoire réelle X, on appelle **médiane** de X tout nombre réel Me qui vérifie $P(X \leqslant Me) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $P(X \geqslant Me) \geqslant \dfrac{1}{2}$

1. **Cas des lois continues**
   Montrer que si la fonction de répartition de X est continue, alors il existe au moins une médiane Me et elle vérifie $P(X \leqslant Me) = P(X \geqslant Me) = \dfrac{1}{2}$
   Il est possible de démontrer l'existence d'une médiane même lorsque la fonction de répartition n'est pas continue.

2. Montrer que l'ensemble des médianes d'une variable aléatoire X est un intervalle, autrement dit que si a et b sont des médianes, alors pour tout $c \in [a;b]$, c est une médiane.

3. Déterminer la médiane d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$

4. **Lois exponentielles**

   (a) Déterminer la médiane d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

   (b) La médiane est-elle égale à l'espérance ?

5. **Datation au carbone 14**
   D'après la loi de décroissance radioactive, la durée de vie T d'un atome de carbone 14 (avant qu'il ne se désintègre en carbone 12) suit une loi exponentielle.
   La demi-vie (ou période) est le temps nécessaire pour que la moitié d'un lot d'atomes radioactifs (tous de même nature et très nombreux) se désintègre. Sa mesure permet d'estimer la médiane de T, à partir de l'identification usuelle entre $P(T \leqslant s)$ et la proportion d'atomes désintégrés au bout d'un temps s.
   Un être vivant assimile le carbone 14 présent dans le milieu au cours de son existence. La proportion de carbone 14 présent dans le milieu étant considérée comme constante (avant les premiers essais nucléaires), la proportion de carbone 14 parmi les atomes constituant un être vivant est constante, mais elle commence à décroître par désintgération radioactive à la mort de l'individu.
   La mesure de la proportion de carbone 14 restant dans les tissus d'un organisme mort permet donc d'estimer la date de son décès (procédé très utilisé en archéologie).

   (a) Sachant que la demi-vie du carbone 14 est estimée à 5700 ans ($\pm$ 50 ans), déterminer la loi de T (exprimée en années). La valeur de λ sera arrondie à 10^{-5} près

   (b) Calculer $P(T > 11400)$. Ce résultat était-il prévisible ?

   (c) Pour quelle durée a a-t-on $P(T > a) = 0,125$?

   (d) Catastrophe au musée !
   Les momies attribuées à Ramsès II (décédé en 1213 avant J.C.), Khéops (décédé en 2566 avant J.C.) et un troisième individu inconnu ont été mélangées. On a mesuré les proportions en carbone 14 (par rapport à la norme pour un individu humain vivant) dans les trois organismes et obtenu les prorportions respectives de 77%, 67% et 57%. Saurez-vous identifier les 3 corps ?

III Variables aléatoires, espérance et variance

Exercice 15:

Montrer que si la variable aléatoire X admet une espérance, alors $\lim_{n\to+\infty} P(X \geqslant n) = 0$

Exercice 16:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
On appelle L^1 l'ensemble des variables aléatoires sur Ω qui admettent une espérance.
Vérifier que L^1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^\Omega$.

Exercice 17:

Loi de Cauchy de paramètre $a > 0$

1. Déterminer la valeur de k pour laquelle on définit une densité de probabilité en posant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{k}{a^2 + x^2}$ et donner la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f.
2. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Les lois de Cauchy apparaissent lorsqu'on calcule le quotient de deux variables gaussiennes indépendantes.

Exercice 18:

Déterminer la fonction de répartition, la densité de probabilité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X = U^2$ lorsque :

1. U suit une loi uniforme sur $[0; 1]$
2. U suit une loi uniforme sur $[-1; 1]$

Exercice 19:

Loi gamma de paramètres $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$

On rappelle que la fonction Γ est définie $\forall \alpha \in]0; +\infty[$, par $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ vérifie :

- $\forall \alpha \in]0; +\infty[,\ \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n + 1) = n!$

1. Montrer qu'on définit une densité de probabilité en posant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$
Donner la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f.
2. Montrer que X admet une espérance et que $E[X] = \dfrac{\alpha}{\lambda}$
3. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et que $E[X] = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$
4. Quelle loi reconnait-on lorsque $\alpha = 1$?
5. Montrer que si $k > 0$, la variable kX suit la loi gamma de paramètre $k\lambda$ et α

Exercice 20:

Loi logistique standard Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $F(t) = \dfrac{e^t}{1 + e^t}$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est une densité de probabilité.
2. On déduit de ce qui précède que F peut être interprété comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Montrer que X admet une espérance et la calculer
3. On pose $Y = ln(1 + e^X)$ et $Z = F(X)$
Quelles sont les lois bien connues suivies par Y et Z ?

Problème 21:

Loi de Pareto Soient $a > 0$ et Y une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$
On étudie la loi de probabilité de la variable aléaytoire $X = ae^Y$, appelée loi de Pareto.

1. Déterminer l'expression la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
2. En déduire que X suit une loi de densité f que l'on déterminera.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que X admet un moment d'ordre n si, et seulement si, $n < \theta$.
4. Déterminer l'espérance et la variance de X lorsqu'elles existent.
5. La loi de Pareto est utilisée dans de nombreux domaines en économie, dont la modélisation de la répartition des richesses dans une population, liée aux travaux de l'économiste et sociologue italien Vilfredi Pareto (1848-1923) qui constata que 20% des italiens possèdaient 80% des richesses du pays.
On suppose que X désigne la richesse (dans une unité arbitraire) possédée par un italien pris au hasard dans la population de l'époque et que X suit une loi de Pareto.
    (a) Exprimer en fonction de a et θ la "richesse" de l'individu le plus pauvre.
    (b) Exprimer en fonction de a et θ le seuil de richesse s à partir duquel un individu fait parti des 20% les plus riches, autrement dit, la valeur de s telle que $P(X > s) = 0,2$
    Vérifier que pour $\theta > 1$, $s > a$ (le contraire invaliderait le modèle !)
    (c) $I = \displaystyle\int_s^{+\infty} t \times \frac{\theta a^\theta}{t^{\theta+1}}\, dt$ s'interprète comme la contribution des 20% d'individus les plus riches lors du calcul de la richesse moyenne $E[X]$. D'après les constatations de Pareto, on a donc $\dfrac{I}{E[X]} = 0,8$.
    En déduire la valeur de θ à 10^{-2} près.
    (d) Que peut-on penser de l'affirmation "On ne peut pas dire que je suis riche, mon patrimoine correspond tout juste à la richesse moyenne." ?
    (e) Les rapports récents sur la répartition des richesses mondiales utilisaient une loi de Pareto avec $\theta = 1,36$. Quelle est la part des richesse détenue par les 20% d'individus les plus riches ?

IV lois normales

■ Exercice 22:

Loi du χ^2
Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
La loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$ est appelée loi du χ^2 à un degré de liberté

1. Déterminer une densité de probabilité de Y
2. Calculer $E[Y]$ (en évitant un fastidieux calcul d'intégrale !)

■ Exercice 23:

1. Montrer que si X est une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la valeur de $P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma])$ ne dépend pas pas des valeurs de μ et σ.
2. Déterminer une valeur approchée de cette probabilité en utilisant Python
3. Soit Y une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(-5, 100^2)$. En utilisant Python, déterminer la plus grande valeur de t pour laquelle $P(Y > t) > 0,999$

■ Exercice 24:

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire gaussienne X sachant que $P(X > 208) = 0,5$ et $P(X < 600) = 0,95$
2. En utilisant Python ou une calculatrice, déterminer la loi de la variable aléatoire gaussienne Y sachant que $P(Y \leqslant 6) = 0,99$ et $P(X > 0,5) = 0,32$

V Variables aléatoires indépendantes

■ Exercice 25:

L'une des deux fonctions ci-dessous permet-elle de renvoyer un booléen aléatoire (avec autant de chance d'obtenir True ou False) ?

```
 import Random as rd

# l'instruction rd.random() génère un nombre pseudo-aléatoire
suivant la loi uniforme sur [0;1[; les résultats de deux appels
successifs à cette fonction sont considérés indépendants

def vraifaux():
.     '''entrée : aucune
.     sortie : un booléen aléatoire'''
.     X=rd.random()
.     Y=rd.random()
.     B=(X==Y)
.     return B

def VraiFaux():
.     '''entrée : aucune
.     sortie : un booléen aléatoire'''
.     X=rd.random()
.     Y=rd.random()
.     B=(X<Y)
.     return B
```

Problème 26:

1. **Loi du maximum de 2 variables indépendantes**
   Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, F_X et F_Y leurs fonctions de répartitions.
   On considère la variable aléatoire $Z = max(X, Y)$ et sa fonction de répartition F_Z
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = F_X(t) \times F_Y(t)$
   (b) On suppose que X suit une loi uniforme sur $[1; 3]$ et Y la loi uniforme sur $[5; 10]$. Quelle est la fonction de répartition de Z ? Etait-ce prévisible ?
2. **Loi du maximum de n variables indépendantes de même loi**
   Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, et F_{X_1} leur fonction de répartition.
   On considère la variable aléatoire $M_n = max(X_1, X_2, ..., X_n)$
   (a) Exprimer la fonction de répartition de M_n en fonction de F_{X_1}
   (b) A partir de quel valeur de n a-t-on $P(M_n \leqslant 0) \leqslant 0,001$?
3. **Loi du minimum de 2 variables aléatoires indépendantes**
   Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, F_X et F_Y leurs fonctions de répartitions.
   On considère la variable aléatoire $Z = min(X, Y)$ et sa fonction de répartition F_Z
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = 1 - (1 - F_X(t)) \times (1 - F_Y(t))$
   (b) On suppose que X suit une loi uniforme sur $[1; 3]$ et Y la loi uniforme sur $[2; 4]$. Montrer que Z admet une densité de probabilité et la représenter graphiquement.
4. **Loi du minimum de n variables indépendantes de même loi**
   Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi exponentielle de paramètre λ, et F_{X_1} leur fonction de répartition.
   On considère la variable aléatoire $M_n = min(X_1, X_2, ..., X_n)$
   (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n
   (b) Quelle est la loi de probabilité suivie par M_n ?

Exercice 27:

Raymond maintient son pantalon au niveau de sa taille grâce à une paire de bretelles et une ceinture. Les durées de vie de ces deux accessoires suivent des lois exponentielles indépendantes de même paramètre 0,1. Tant qu'il y a au moins un des deux accessoire en bon état, la tenue de Raymond reste décente.
On note T la variable aléatoire égale au temps, en années, pendant lequel le pantalon de Raymond ne met pas en péril son élégance.

1. Déterminer la fonction de répartition puis la densité de probabilité de T
2. Est-il vrai que l'usage des 2 accessoires double la durée moyenne pendant laquelle Raymond peut espérer conserver une tenue décente par rapport à la durée moyenne pendant laquelle il conserverait une tenue décente en utilisant seulement une ceinture ?

Exercice 28:

Une fois rien... C'est rien !
Deux fois rien... Ce n'est pas beaucoup !
Mais trois fois rien, .. Pour trois fois rien, on peut deja acheter quelque chose
Et pour pas cher !
(Raymond Devos)

Considérons que toute variable aléatoire "égale à rien" suit la loi normale centrée réduite.
Soit X une variable aléatoire égale à trois fois rien, c'est à dire la somme de trois variables aléatoires indépendantes "égales à rien". Quel est le prix, en euros, maximal ϵ d'un objet pas cher qu'il est possible d'acheter avec trois fois rien en poche avec une probabilité supérieure à 1%, c'est à dire tel que $P(|X| > \epsilon) > 0,01$?

Exercice 29:

Loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$ (dite aussi loi exponentielle symétrique)
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y qui suivent une loi exponentielle de paramètre

1. Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire $-Y$
2. En utilisant la formule du produit de convolution, montrer que la variable aléatoire $Z = X - Y$ suit la loi dont la densité de probabilité est définie $\forall x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$.
3. Montrer que Z est centrée.
4. Z est-elle centrée réduite ?
5. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $T = |Z|$?

Exercice 30:

On rappelle que la densité de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes se calcule à l'aide de la formule du produit de convolution.

1. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$
   Représenter graphiquement la densité de probabilité de la variable aléatoire $\Lambda = U + V$
2. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois uniformes sur $[0; 3]$ et sur $[1; 2]$
   Représenter graphiquement la densité de probabilité de la variable aléatoire $X = Y + Z$